

**Семенець Д.А.**

Навчально-науковий професійно-педагогічний інститут  
Української інженерно-педагогічної академії

**Васильчук Д.П.**

Навчально-науковий професійно-педагогічний інститут  
Української інженерно-педагогічної академії

**Кобилянський Б.Б.**

Навчально-науковий професійно-педагогічний інститут  
Української інженерно-педагогічної академії

**Романуша В.О.**

Навчально-науковий професійно-педагогічний інститут  
Української інженерно-педагогічної академії

## **ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЧНО-ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ТОВЩИННО-ЗСУВНИХ КОЛИВАНЬ КВАРЦОВИХ РЕЗОНАТОРІВ**

*У статті досліджується математична модель товщинно-зсувних коливань п'єзоелектричних пластин обмежених розмірів поперечного Y-зрізу кварцу із симетричним відносним масонавантаженням, яка заснована на рішенні рівнянь стану електропружного поля матрично-операторним методом. Отримані аналітичні рівняння для розрахунків резонансної частоти коливань п'єзоелемента і електричної провідності, що враховують залежність від просторових координат  $X_2, X_3$  (товщина і ширина п'єзоелемента) і симетричного відносного масонавантаження. Вираз для електричної провідності може бути використаний для визначення еквівалентної схеми заміщення. Крім того, отримано аналітичні рівняння для визначення механічного зсуву, електричного потенціалу і механічної напруги.*

*Представлені результати чисельного аналізу запропонованої математичної моделі для випадку AT-зрізу кварцу: побудовані залежності відносної зміни частоти коливань від відносного масонавантаження для різних мод коливань, побудовані залежності механічного зсуву від двох просторових координат  $X_2, X_3$ , при деяких фіксованих значеннях відносного масонавантаження. Показано, що наявність відносного масонавантаження призводить до зменшення резонансної частоти  $f$ , встановлено, що відносне масонавантаження має менший вплив на резонансну частоту на вищих гармоніках.*

*Встановлено факт залежності механічного зміщення  $u_1$  від просторової координати  $X_3$ , показано, що форма хвилі спотворюється по мірі віддалення від серединної площини  $X_3 = 0$ , тобто на відміну від поширених одномірних моделей, запропонована модель вказує на те, що форма хвилі стає відмінною від синусоїдальної завдяки граничному ефекту.*

*Запропонована математична модель коливань п'єзоелектричної пластини може бути використана в проектуванні нових резонаторів, фільтрів, датчиків у пристроях контролю зв'язку, контрольно-вимірних приладах та інших п'єзорезонансних коливальних системах.*

**Ключові слова:** кварцовий резонатор, товщинно-зсувні коливання, п'єзоелемент, Y- і AT-зріз кварцу, матрично-операторний метод.

**Постановка проблеми.** Необхідність вдосконалення відомих і створення нових вимірних перетворювачів різноманітних фізичних величин зумовлена всебічним розвитком інформаційних систем вимірювання, контролю та керування. Одними з найбільш перспективних вимірних перетворювачів є автогенераторні вимірні перетворювачі, які складаються

з частотного автогенераторного датчика з частотним вихідним сигналом та кодуючого перетворювача із цифровим вихідним сигналом.

Застосування в таких перетворювачах п'єзорезонансних датчиків дає змогу забезпечити високу точність вимірювання та чутливість до багатьох фізичних величин. Використання п'єзорезонансних датчиків для визначення невеликої

кількості осадженої речовини було запропоновано Зауербреєм (Sauerbrey) у 1959 р. Він довів, що тонка плівка, осаджена на поверхні електрода п'єзореzonатора, зменшує його резонансну частоту пропорційно вазі плівки. Це стало підґрунтям розробки різноманітних п'єзореzonансних датчиків, які виконують перетворення «маса – частота» або «товщина – частота».

Сучасні тенденції створення інформаційно-вимірювальних систем потребують розв'язання суперечливих завдань, як-от: уніфікація конструкції, лінеаризація характеристики перетворення, підвищення точності, з одного боку, та зниження складності та собівартості – з іншого, що визначає необхідність вдосконалення відомих і пошуки нових математичних моделей п'єзореzonансних датчиків при зовнішніх впливах, зокрема масонавантаженні. Це своєю чергою дасть змогу підвищити точність та адекватність визначення основних електричних та експлуатаційних характеристик п'єзоелектричних резонаторів, які необхідні при розрахунках пристроїв генерації та селекції сигналів та істотно визначаються особливостями механічних коливань п'єзоелектричного елемента.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Математичні моделі, що описують товщинно-зсувні коливання (TSh) п'єзоелектричних пластин, представлені як у вітчизняних, так і в іноземних публікаціях, умовно можна поділити на два класи: одновимірні і двовимірні моделі. До першого класу належать моделі, отримані в результаті спрощення точних тривимірних рівнянь коливання п'єзоелемента (ПЕ) в припущенні, що усі параметри, що описують поведінку ПЕ, залежать тільки від однієї просторової координати (яка характеризує товщину ПЕ) [1; 2]. Другий клас математичних моделей отриманий шляхом розкладання в степеневий ряд величин, що характеризують електропружне поле у тривимірному просторі, уздовж однієї з просторових координат [2; 3].

Перший клас математичних моделей детально описаний у роботах [1; 2], де представлені точні рішення одновимірної моделі тонкої п'єзоелектричної пластини нескінченних розмірів, з урахуванням відносного масонавантаження і міжелектродного зазору. Ці моделі описують процеси в п'єзоелектричних пластинах за умов довжини  $l$  і ширини  $m$  набагато більших товщини  $h$ , проте у випадку мікрореzonаторів, які останнім часом отримали велике поширення, ці моделі недосконалі з огляду на прояв граничного ефекту.

У роботі [4] запропонована математична модель другого класу, визначена резонансна частота TSh коливань. У роботі [5], на відміну від [6], врахований вплив відносного масонавантаження та отримані співвідношення для резонансних частот коливання ПЕ, встановлений факт зменшення резонансної частоти TSh коливань в умовах збільшення відносного масонавантаження. У роботі автор [7], ґрунтуючись на лінійній апроксимації TSh коливань, запропонованій Міндліном, отримав рівняння для резонансної частоти у випадку квадратичного закону розподілу відносного масонавантаження уздовж довжини і ширини ПЕ. Встановлено, що резонансна частота чутлива до нерівномірності відносного масонавантаження на поверхні ПЕ.

Загальним недоліком наведених вище математичних моделей другого класу є та обставина, що в них нехтують п'єзоелектричними постійними  $e_{kij}$ , отримуючи, по суті, рішення, що описують механічні коливання пружного тіла без урахування п'єзо ефекту.

У представленій роботі для дослідження TSh коливань п'єзоелектричних пластин застосований матрично-операторний метод. Цей метод застосовувався для дослідження планарних коливань п'єзоелектричних пластин (коливаннями розтягування-стискування в площині пластини) [8].

**Постановка завдання.** Метою статті є розробка математичної моделі TSh коливання поверненого Y-зрізу кварцу на основі матрично-операторного методу, яка враховує симетричне відносне масонавантаження в припущенні, що усі величини, що характеризують електропружне поле, залежать від двох просторових координат  $X_2, X_3$ .

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Тривимірні рівняння стану, руху і електростатики п'єзоелектричної пластини довільної симетрії, що описують TSh коливання [2], мають такий вигляд:

$$\begin{cases} T_{ij} = 0,5c_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + e_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \\ D_i = 0,5e_{kij} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + \varepsilon_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \\ \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\ \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0. \end{cases}, \quad (1)$$

де  $c_{ijkl}$ ,  $e_{kij}$ ,  $\varepsilon_{ik}$  – пружні, п'єзоелектричні і діелектричні постійні п'єзоелемента;

$\rho, D_i, u_i, \varphi$  – щільність п'єзоелемента, електричне і механічне зміщення уздовж координатних осей і електричний потенціал відповідно;

$T_{ij}$  – механічна напруга.

Індекси набувають значень  $i, j, k, l = 1, 2, 3$

Пластини різних зрізів кварцу мають різні пружні п'єзодіелектричні матриці кристалів. Один із класів зрізів кварцу, повернений Y-зріз, отримав найбільше поширення в конструюванні п'єзоелектричних пристроїв. У таких п'єзоелектричних пристроях переважно використовують компоненту зміщення  $u_1(x_2, x_3)$ , а інші компоненти  $u_2(x_2, x_3) = u_3(x_2, x_3) = 0$  [2].

Система рівнянь стану, руху і електростатики (1) для випадку поверненого Y-зрізу кварцу за умови використання тільки однієї компоненти механічного зміщення  $u_1(x_2, x_3)$  [2] буде такою:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{21} = c_{56} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + c_{66} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + e_{26} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + e_{36} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ D_2 = e_{25} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + e_{26} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \varepsilon_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \varepsilon_{23} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ T_{31} = c_{55} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + c_{56} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + e_{25} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + e_{35} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ D_3 = e_{35} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + e_{36} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \varepsilon_{23} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial D_3}{\partial x_3} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

Грунтуючись на матрично-операторному методі рішення завдань лінійної теорії п'єзоелектрики для пластини, зображеної на рисунку 1, отримуємо математичну модель, яка враховує як геометричні розміри пластини уздовж координатних осей  $X_2, X_3$ , так і масу електродів.

З рівнянь (3) і (4) системи (2) знайдемо похідні зміщення  $u_1(x_2, x_3)$  і потенціалу  $\varphi(x_2, x_3)$  за координатою  $x_3$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\alpha_4 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \alpha_1 T_{31} + \alpha_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \alpha_7 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \alpha_6 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \alpha_2 T_{31} - \alpha_5 D_3, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\text{де } \alpha_1 = \frac{\varepsilon_{33}}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}}, \quad \alpha_2 = \frac{e_{35}}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}},$$

$$\alpha_3 = \frac{(e_{35}\varepsilon_{23} - e_{25}\varepsilon_{33})}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}}, \quad \alpha_4 = \frac{(e_{35}e_{36} + c_{56}\varepsilon_{33})}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}},$$

$$\alpha_5 = \frac{c_{55}}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}}, \quad \alpha_6 = \frac{(e_{25}e_{35} + c_{55}\varepsilon_{23})}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}},$$

$$\alpha_7 = \frac{(e_{36}c_{55} - e_{35}c_{56})}{e_{35}^2 + c_{55}\varepsilon_{33}}.$$

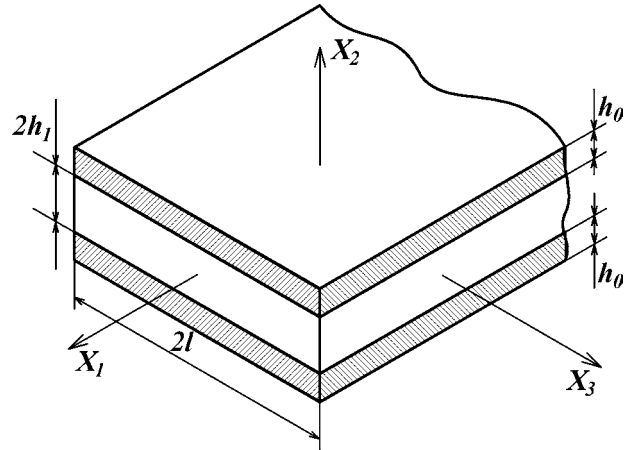


Рис. 1. Тонка п'єзоелектрична пластинка, обмежена в напрямі осей  $X_2, X_3$  і нескінченна в напрямі осі  $X_1$ , у прямокутній системі координат

Використовуючи систему рівнянь (3), виключимо похідні  $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$  і  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$  з рівнянь (1) і (2) системи (2), потім підставимо отримані співвідношення для  $T_{21}$  і  $D_2$  у рівняння (5) і (6) системи (2). Отримаємо таку систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{31}}{\partial x_2} = -\rho\omega^2 u_1 - \alpha_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \alpha_{10} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \alpha_4 \frac{\partial T_{31}}{\partial x_2} + \\ + \alpha_7 \frac{\partial D_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial D_3}{\partial x_2} = -\alpha_{10} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \alpha_{14} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \alpha_3 \frac{\partial T_{31}}{\partial x_2} - \alpha_6 \frac{\partial D_3}{\partial x_2}, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\alpha_{10} = e_{26} + c_{56}\alpha_3 - e_{36}\alpha_6, \quad \alpha_{11} =$$

$$\text{де } = c_{66} - c_{56}\alpha_4 + e_{36}\alpha_7, \quad \alpha_{14} =$$

$$= e_{25}\alpha_3 - \varepsilon_{22} + \alpha_6\varepsilon_{23}.$$

Системи рівнянь (3) і (4) представимо в матричній формі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = M_{11}U_1 + M_{12}U_2 \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_3} = M_{21}U_1 + M_{22}U_2, \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\text{де } U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ \varphi \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} T_{31} \\ D_3 \end{bmatrix},$$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} -\alpha_4 \frac{\partial}{\partial x_2} & \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \alpha_7 \frac{\partial}{\partial x_2} & -\alpha_6 \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}, M_{22} = \begin{bmatrix} -\alpha_4 \frac{\partial}{\partial x_2} & \alpha_7 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_2} & -\alpha_6 \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & -\alpha_5 \end{bmatrix}.$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} -\rho\omega^2 - \alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -\alpha_{10} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ -\alpha_{10} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -\alpha_{14} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix},$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & -\alpha_5 \end{bmatrix}.$$

Позначимо значення векторів  $U_1, U_2$  на середній площині  $X_3 = 0$  як

$U_{10}, U_{20}$ :

$$U_{10} = \begin{bmatrix} u_{10} \\ \varphi_{10} \end{bmatrix}, U_{20} = \begin{bmatrix} T_{310} \\ D_{310} \end{bmatrix}.$$

Тоді загальне рішення системи (5) представляється через матричну експоненту у вигляді:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = e^{Mx_3} \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\text{де } M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} T_{31}(x_2; +l) - T_{31}(x_2; -l) = 2T_{310} - 2l \left( \rho\omega^2 u_{10} + \alpha_4 \frac{\partial^2 T_{310}}{\partial x_2^2} - \alpha_7 \frac{\partial^2 D_{310}}{\partial x_2^2} + \alpha_{11} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x_2^2} + \alpha_{10} \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial x_2^2} \right) \\ D_3(x_2; +l) - D_3(x_2; -l) = 2 \left( D_{310} + l\alpha_3 \frac{\partial T_{310}}{\partial x_2} \right) - 2l \left( \alpha_6 \frac{\partial D_{310}}{\partial x_2} + \alpha_{10} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x_2^2} + \alpha_{14} \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial x_2^2} \right) \\ \frac{T_{31}(x_2; +l) + T_{31}(x_2; -l)}{2} = T_{310}(x_2) \\ \frac{D_3(x_2; +l) + D_3(x_2; -l)}{2} = D_{310}(x_2) \end{cases}, \quad (9)$$

де  $T_{31}(x_2; +l), T_{31}(x_2; -l), D_3(x_2; +l), D_3(x_2; -l)$  – відомі значення величин при  $x_3 = \pm l$ .

Представимо матричну експоненту у вигляді степеневого ряду  $e^{Mx_3} = E_4 + Mx_3 + M^2 \frac{x_3^2}{2} + \dots$

й обмежимося двома членами в цьому розкладанні.

Тоді:

$$\begin{cases} U_1 = (E_2 + M_{11}x_3)U_{10} + M_{12}x_3U_{20} \\ U_2 = M_{21}x_3U_{10} + (E_2 + M_{22}x_3)U_{20}. \end{cases} \quad (7)$$

Запишемо систему (7) в розгорнутому виді, тобто з урахуванням рівнянь (5):

$$\begin{cases} u_1 = u_{10} + x_3 \left( \alpha_1 T_{310} + \alpha_2 D_{310} - \alpha_4 \frac{\partial u_{10}}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial x_2} \right) \\ \varphi = \varphi_{10} + x_3 \left( \alpha_2 T_{310} - \alpha_5 D_{310} + \alpha_7 \frac{\partial u_{10}}{\partial x_2} - \alpha_6 \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial x_2} \right) \\ T_{31} = T_{310} - x_3 \left( \rho\omega^2 u_1 + \alpha_4 \frac{\partial T_{310}}{\partial x_2} - \alpha_7 \frac{\partial D_{310}}{\partial x_2} + \alpha_{11} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x_2^2} + \alpha_{10} \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial x_2^2} \right) \\ D_3 = D_{310} + x_3 \left( \alpha_3 \frac{\partial T_{310}}{\partial x_2} - \alpha_6 \frac{\partial D_{310}}{\partial x_2} - \alpha_{10} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x_2^2} - \alpha_{14} \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial x_2^2} \right) \end{cases}, \quad (8)$$

Якщо припускати, що на боковій поверхні пластини задані механічна напружка  $T_{31}$  і електричне зміщення  $D_3$ , то, приймаючи в рівняннях (3) і (4) системи (8)  $x_3 = \pm l$ , можемо записати систему диференціальних рівнянь щодо невідомих  $u_{10}, \varphi_{10}, T_{310}, D_{310}$ , яка після елементарних перетворень матиме вигляд:

Оскільки бокова поверхня п'єзоелемента вільна від механічного впливу, можна прийняти  $T_{31} = 0$ , крім того, будемо вважати, що  $D_3 = 0$ , оскільки бокова поверхня ПЕ граничить із повітрям, діелектрична проникність якого значно менша за діелектричні постійні  $\epsilon_{ij}$  ПЕ. З урахуванням вищезгаданих припущень система рівнянь (9) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \rho\omega^2 u_{10} + \alpha_{11} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x_2^2} + \alpha_{10} \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial x_2^2} = 0 \\ \alpha_{10} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x_2^2} + \alpha_{14} \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial x_2^2} = 0 \\ T_{310} = 0 \\ D_{310} = 0 \end{cases}, \quad (10)$$

Варто зауважити, що рівняння системи (10) не містять геометричний розмір  $l$ , хоча в роботі [9] ця величина в аналогічних виразах присутня.

Система рівнянь (10) вільна від розміру  $l$ , тому що при розкладанні матричної експоненти в степенеий ряд було взято два перших члена розкла-

$$\begin{cases} u_1 = \sin(\eta x_2)(C_1 + \eta x_3 \alpha_{24} C_2) + \cos(\eta x_2)(C_2 - \eta x_3 \alpha_{24} C_1) + x_3 \alpha_3 C_4 \\ \varphi = \sin(\eta x_2)(C_1 \alpha_{19} - \eta x_3 \alpha_{25} C_2) + \cos(\eta x_2)(C_2 \beta_{19} + \eta x_3 \alpha_{25} C_1) + (x_2 - x_3 \alpha_6) C_4 + C_3 \\ T_{31} = 0 \\ D_3 = 0 \end{cases}, \quad (12)$$

де  $\alpha_{24} = \alpha_4 - \alpha_3 \alpha_{19}$ ,  $\alpha_{25} = \alpha_7 - \alpha_6 \alpha_{19}$ .

Закони зміни  $T_{21}$  і  $D_2$  можна встановити, якщо рівняння для  $u_1, \varphi, D_3, T_{31}$  з (12) підставити в рівняння для  $T_{21}$  і  $D_2$  системи (2), які були отримані на етапі

виключення з них похідних  $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$  і  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ . В результаті підстановки з урахуванням  $T_{31} = 0, D_3 = 0$ , отрима-

ємо такі рівняння для  $T_{21}$  і  $D_2$ :

$$\begin{cases} T_{21} = C_4 \alpha_{10} + \eta [C_1 \cos(\eta x_2) - C_2 \sin(\eta x_2)] \alpha_{20} \\ D_2 = C_4 \alpha_{14}, \end{cases} \quad (13)$$

де  $\alpha_{20} = \alpha_{11} + \alpha_{10} \alpha_{19}$ .

Для визначення констант  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , що входять в (11, 12, 13), необхідно врахувати граничні умови для  $T_{21}$  і  $\varphi$ :

$$\begin{cases} -T_{21} = 2\rho_0 h_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, x_2 = h \\ T_{21} = 2\rho_0 h_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, x_2 = -h \\ \varphi = \pm \varphi_0, x_2 = \pm h \end{cases}, \quad (14)$$

данья, на відміну від роботи [9], де зберігалися перші три члени розкладання. Таке спрощення прийняте з метою врахування відносного масонавантаження, яке вноситься електродами збудження. У математичній моделі [9] відносне масонавантаження не враховувалося з причини складності і громіздкості отримання математичного рівняння при традиційному підході до перетворень.

Вирішуючи систему рівнянь (10) знайдемо рівняння що описують механічне зміщення  $u_{10}(x_2)$  і електричний потенціал  $\varphi_{10}(x_2)$  у серединній площині:

$$\begin{cases} u_{10} = C_1 \sin(\eta x_2) + C_2 \cos(\eta x_2) \\ \varphi_{10} = \alpha_{19} [C_1 \sin(\eta x_2) + C_2 \cos(\eta x_2)] + C_3 + C_4 x_2 \end{cases}, \quad (11)$$

де  $\eta = \sqrt{\rho \alpha_{16}} \omega$  – хвилеве число

$$\alpha_{16} = \frac{\alpha_{14}}{-\alpha_{10}^2 + \alpha_{11} \alpha_{14}}, \alpha_{19} = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{14}}.$$

Маючи в розпорядженні рішення (11), можна визначити рівняння для  $u_1, \varphi, D_3, T_{31}$  системи рівнянь (8):

Підставляючи рівняння для  $T_{21}$  і  $\varphi$  з (12, 13), в (14) визначаємо константи  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\alpha_{21} \varphi_0}{W_1} \\ C_4 = \frac{\eta \varphi_0 W_1}{W_2} \\ C_2 = C_3 = 0, \end{cases} \quad (16)$$

де  $W_1 = 2R\eta h_1 \sin(\eta h_1) - \cos(\eta h_1)$ ,

$W_2 = (2R\eta^2 h_1^2 + \alpha_{23}) \sin(\eta h_1) - \eta h_1 \cos(\eta h_1)$ ,

$\alpha_{21} = \alpha_{10} \alpha_{16}$ ,  $R = \frac{\rho_0 h_0}{\rho_1 h_1}$  – відносне масонавантаження.

Маючи в розпорядженні співвідношення для констант  $C_1, C_2, C_3, C_4$  можна визначити усі початкові параметри товщинно-зсувних коливань п'єзоелектричних пластин. У рамках проведеного дослідження запишемо лише рівняння для  $u_1$  і  $D_2$ , оскільки ці параметри дають змогу визначити резонансну частоту коливань п'єзоелектричної пластини.

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\varphi_0 [\alpha_{21} \sin(\eta x_2) + \eta x_3 (W_1 \alpha_3 - \cos(\eta x_2) \alpha_{30})]}{W_2}, \\ D_2 = \frac{\eta \varphi_0 [\alpha_{14} W_1 + \eta \alpha_{29} x_3 \sin(\eta x_2)]}{W_2} \end{cases}, \quad (17)$$

де  $\alpha_{29} = \alpha_{21} (\alpha_{10} \alpha_{24} - \alpha_{14} \alpha_{25})$ ,  $\alpha_{30} = \alpha_{21} \alpha_{24}$ .

Резонансну частоту коливань  $\omega$  п'єзоелектричної пластини визначимо, виходячи з рівняння повної провідності ПЕ  $Y$ .

Згідно [8] повну провідність можна визначити з рівняння:

$$Y = \frac{I}{U} = \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-m}^m \int_{-l}^l D_2(x_2, x_3) dx_1 dx_3. \quad (18)$$

Враховуючи, що  $D_2(x_2, x_3)$  не залежить від координати  $x_1$ , тоді співвідношення для провідності, можна розглянути в такому виді:

$$Y = \frac{2j\omega m}{U} \int_{-l}^l D_2(x_2, x_3) dx_3, \quad (19)$$

Підставляючи в (19) рівняння для  $D_2$  з (17), приймаючи при цьому  $x_2 = h_1$ , отримуємо:

$$Y = \frac{2j\omega m}{U} \left[ \frac{2l\eta\alpha_{14}\varphi_0}{\eta h_1 + \frac{\alpha_{23}}{(2R\eta h_1 - \cot(\eta h_1))}} \right], \quad (20)$$

На резонансній частоті  $Y \rightarrow \infty$  отже, послідовний резонанс настає, коли знаменник в (20) дорівнює нулю. Після нескладних перетворень отримаємо наступне трансцендентне рівняння для визначення послідовної резонансної частоти коливань:

$$\cot(\eta h_1) = 2R\eta h_1 + \frac{\alpha_{23}}{\eta h_1}, \quad (21)$$

Рівняння (21) визначає послідовну резонансну частоту товщинно-зсувних коливань антисиметричних мод, збуджуваних електрично в п'єзоелектричній пластині. Коректність рівняння (21) можна перевірити, зіставивши його з аналогічним рівнянням, отриманим у роботі [2], що описує процеси у п'єзоелектричній пластині, нескінченних розмірів.

$$\cot(\zeta h) = 2R\zeta h + \frac{\bar{k}_{26}^2}{\zeta h}, \quad (22)$$

Зіставляючи рівняння (21) і (22), можна зробити висновок, що, незважаючи на різну структуру коефіцієнтів  $\alpha_{23}$  і  $\bar{k}_{26}^2$ , їх числові значення незначно відрізняються один від одного, те саме стосується коефіцієнтів

$\sqrt{\alpha_{16}\rho}$  і  $\sqrt{\frac{\rho}{c_{66}(1+k_{26}^2)}}$ , що входять до хвильових чисел  $\eta$  і  $\xi$ .

Трансцендентне рівняння (21) можна вирішити приблизно, якщо врахувати, що електроди тонкі і  $R$  відповідно мале, а чисельне значення коефіцієнта  $\alpha_{23}$  для АТ-зрізу кварцу становить  $\alpha_{23} = 0,0085$ . Нехтуючи відносно малими величинами  $R$  і  $\alpha_{23}$  Рішення запишемо в такому виді:

$$\eta h_1 = \frac{n\pi}{2} - \Delta, \quad (23)$$

де  $\Delta$  – невідома мала величина.

Підставляючи рівняння (23) в (21) і враховуючи, що  $\cot\left(\frac{n\pi}{2} - \Delta\right) = \tan(\Delta)$ , а перший член розкладання в степеневий ряд функції  $\tan(\Delta) = \Delta$ , отримаємо:

$$\Delta_{1,2} = \frac{\pi + 4\pi R \pm \sqrt{\pi^2 - 16(1+2R)\alpha_{23}}}{4 + 8R}, \quad (24)$$

Підставляючи менше значення  $\Delta_1$  з (24) в (23) з урахуванням рівняння для хвильового числа  $\eta$  з (11), отримаємо рівняння для визначення резонансної частоти коливань п'єзоелектричної пластини  $\omega$ :

$$\omega = \frac{\pi(4R(n-1) + 2n-1) + 4\pi R + \sqrt{\pi^2 - 16(1+2R)\alpha_{23}}}{4h_1(1+2R)\sqrt{\alpha_{16}\rho_1}}, \quad (25)$$

Рівняння резонансної частоти  $\omega$  не містить величину геометричного розміру пластини  $l$ , але в роботі [9] цей параметр у співвідношенні для резонансної частоти був присутнім, з тієї самої причини, що була згадана вище для системи рівнянь (10). Крім того, в роботі [9] було показано, що резонансна частота коливань пластини залежить від геометричних розмірів у напрямі осі  $x_3$  незначним чином.

**Чисельний аналіз розробленої математичної моделі.** Для чисельного аналізу запропонованої моделі розглянемо АТ-зріз кварцу з параметрами, взятими з [9]: резонансна частота коливань  $f_0 = 10$  МГц, частотний коефіцієнт  $N = 1661$  кГц·мм; товщина п'єзоелемента  $h_{ПЭ} = \frac{nN}{f_0} = 0,1661$  мм. Матеріальні константи АТ-зріз кварцу узяті з роботи J. Yang [2].

Побудуємо характеристику, що описує залежність відносної зміни частоти резонатора від відносного масонавантаження  $R$  для різних

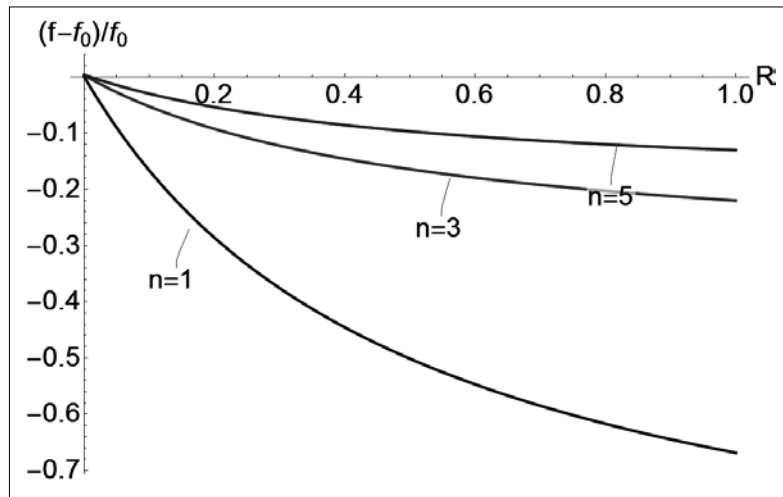
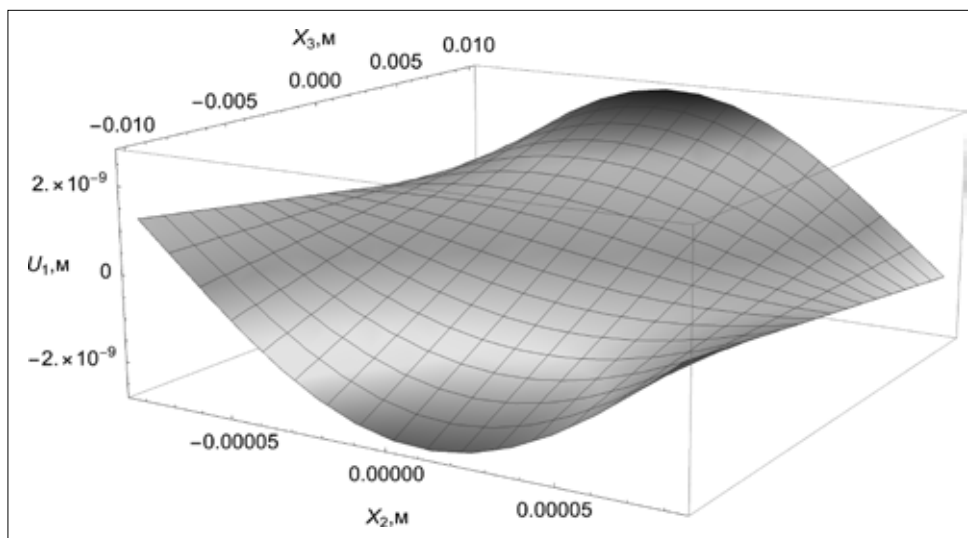
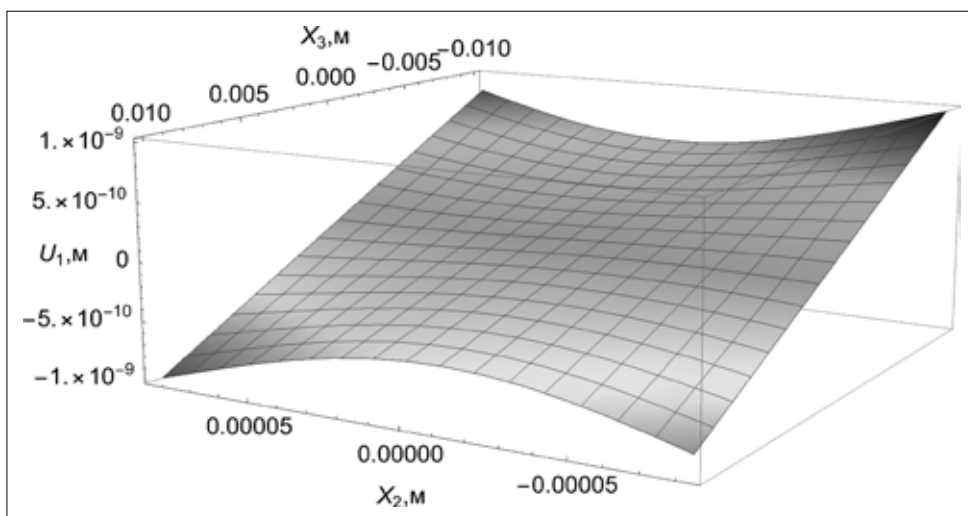


Рис. 2. Залежність відносної зміни частоти  $(f - f_0) / f_0$  від відносного масонавантаження  $R$ , для різних гармонік



а)



б)

Рис. 3. Залежність зміщення  $u_1$  від координат  $X_2, X_3$  і масонавантаження  $R$ : а – при  $R = 0,0048$ ; б – при  $R = 0,048$

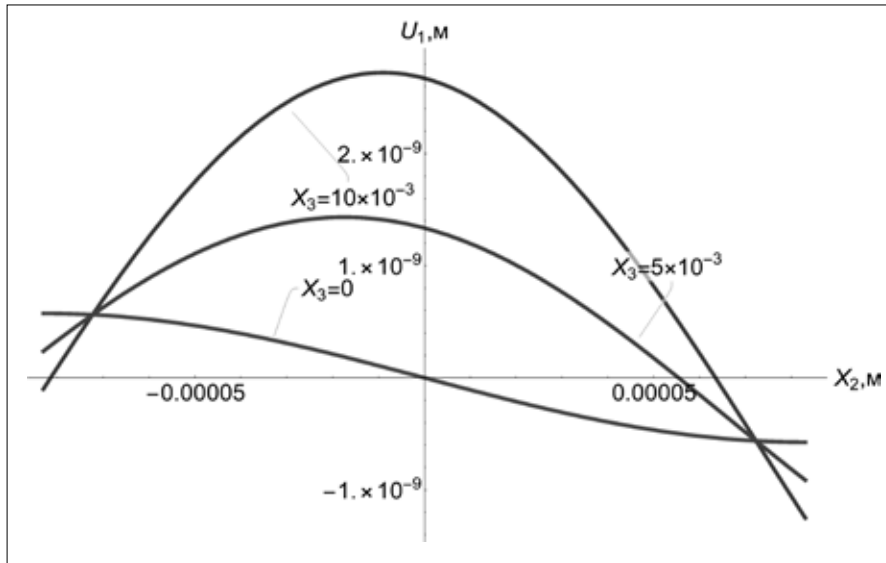


Рис. 4. Залежність зміщення  $u_1$  від координат  $X_2$ , для деяких фіксованих значень  $X_3$  при  $R = 0,0048$

гармонік (рисунок 2). Ця характеристика є залежністю відносної перебудови частоти  $\frac{f - f_0}{f_0}$  від величини відносного масонавантаження  $R$ , де  $f_0$  – резонансна частота товщинно-зсувних коливань п'єзоелектричної пластини, коли  $R = 0$  [2]:

$$\frac{f - f_0}{f_0} = \frac{\pi(4R(n-1) + 2n-1) - \theta_1 + \sqrt{\pi^2 - 16(1+2R)\alpha_{23}}}{\theta_1}, \quad (26)$$

$$\text{де } \theta_1 = \sqrt{2n(1+2R)} \sqrt{c_{66}\alpha_{16} (2\pi^2 + (\pi^2 - 8)k_{26}^2)}$$

Отримані залежності демонструють, що наявність відносного масонавантаження призводить до зменшення резонансної частоти  $f$ , крім того, відносно масонавантаження має менший вплив на резонансну частоту на вищих гармоніках. Так, для першої (основної) гармоніки при зміні відносного масонавантаження  $R$  у діапазоні  $(0 \div 1)$  відносна перебудова частоти, виражена у відсотках, становитиме 67,5%, а для п'ятої гармоніки ця зміна становитиме 12,5%.

На рисунку 3 представлені тривимірні графіки залежності механічного зміщення  $u_1$  на основній гармоніці, від геометричних розмірів пластини  $X_2$  і  $X_3$ . Ці графіки побудовані згідно з рівнянням 1 системи (17), якщо частота послідовного резонансу  $f = 10 \text{ МГц}$ , а відносно масонавантаження дорівнює значенню  $R = 0,0048$  (рис. 3.а, електрод виконаний зі срібла завтовшки  $h_0 = 0,1 \text{ мкм}$ ) і  $R = 0,048$  (рис. 3.б,  $h_0 = 1 \text{ мкм}$ ).

На рисунку 4 представлені двовимірні графіки залежності механічного зміщення  $u_1$  на основній (першій) гармоніці від товщинної координати  $X_2$

при деяких фіксованих значеннях координати  $X_3$  і при  $R = 0,0048$ . Аналіз представлених залежностей механічного зміщення  $u_1$  свідчить про те, що в серединній площині  $X_3 = 0$ , зміщення має таку саму форму як у разі TSh коливань пластин нескінченних розмірів уздовж осей  $X_3$  і  $X_1$  [2]. У разі зміщення від серединної площини до краю пластини спостерігається спотворення форми хвилі, тобто, на відміну від поширених одномірних моделей, запропонована модель вказує на те, що форма хвилі в разі зміщення уздовж осі  $X_3$  відмінна від синусоїдальної за рахунок граничного ефекту.

**Висновки.** Отримала подальший розвиток математична модель чутливого елемента датчика на основі п'єзорезонатора, яка, на відміну від наявних, враховує геометричні розміри пластини як від координат  $X_2$  і  $X_3$ , так і від симетричного відносного масонавантаження  $R$ . Отримано рівняння для провідності, що дасть змогу надалі отримати еквівалентну електричну схему такого елемента для застосування його у складі автогенераторів або фільтрів.

Виявлені особливості розподілу механічного зміщення  $u_1$  уздовж координати  $X_3$ , які вказують на те, що форма хвилі спотворюється в міру віддалення від серединної площини  $X_3 = 0$ , на відміну від ідеалізованих моделей, що не враховують цю особливість. Факт спотворення форми хвилі необхідно врахувати в процесі проектування нових п'єзорезонансних пристроїв, що працюють на TSh типах коливань.

Запропонований чутливий елемент, що враховує відносно масонавантаження і геометричні розміри уздовж координат  $X_2$  і  $X_3$ , може бути застосований у прецизійних датчиках фізичних величин.



Список літератури:

1. Tiersten H.F. Linear Piezoelectric Plate Vibrations: Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations of Piezoelectric Plates. Springer US, 1995. 212 p.
2. Yang J. Analysis of Piezoelectric Devices. World Scientific, 2006. 520 p.
3. Зеленка И. Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах: Материалы, технология, конструкция, применение / Пер. с чеш. Москва : Мир, 1990. 594 с.
4. Mindlin R.D. High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates. *Int. J. Solids Structures*. 1972. Vol. 8. P. 895–906.
5. Huijing H. Thickness-shear vibration of a rectangular quartz plate with partial electrodes / H. Huijing, J. Yang, J.A. Kosinski, J. Wang. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2013. Vol. 26, N. 2. P. 121–128.
6. Wang J. Resonant frequency function of thickness-shear vibrations of rectangular crystal plates / J. Wang, Iijun Y., Qiaoqiao P., Min-chiang C., Jianke D. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control*. 2011. Vol. 58, N. 5. P. 1102–1107.
7. Liu N. Effects of a Mass Layer With Gradually Varying Thickness on a Quartz Crystal Microbalance / N. Liu, S.Y. Jiashi, C. Weiqiu. *IEE Sensors journal*. 2011. Vol. 11, N. 8. P. 1635–1639.
8. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. / Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Москва : Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1988. 472 с.
9. Васильчук Д.П., Семенець Д.А., Романуша В.О., Кобылянський Б.Б., Нефьодова І.В. Математична модель п'єзорезонансної коливальної системи на основі матрично-операторного метода. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи: щоквартальний науково-виробничий журнал*. Кременчук : КрНУ, 2019. Вип. 2/2019 (46). С. 25–32.

**Semenets D.A., Vasylchuk D.P., Kobylanskyi B.B., Romanusha V.O.**

**USE OF THE MATRIX-OPERATOR METHOD FOR RESEARCH OF THICKNESS-SHEAR OSCILLATIONS OF QUARTZ RESONATORS**

*In article mathematical model of thickness-shear oscillations of piezoelectric plates of the limited sizes of Y-cut quartz with symmetric relative mass-load, based on the decision of the equations of a condition of an electroelastic field by a matrix-operator method is research. Analytical expressions for calculation of resonant frequency of oscillations of the piezoelectric element and electric conductivity which take into account dependence on spatial coordinates  $X_2, X_3$  (thickness and width of the piezoelectric element) and symmetric relative mass load are obtained. The expression for electric conductivity can be used to determine an equivalent replacement scheme. In addition, analytical expressions for mechanical shear, electrical potential and mechanical stress are obtained.*

*The results of the numerical analysis of the proposed mathematical model for the case of AT-cut quartz are presented: the dependences of the relative frequency change on the relative mass load for different vibration modes are constructed; the dependences of the mechanical shear from two spatial coordinates are constructed, at some fixed values of the relative mass load. It is shown that the shape of the mechanical shift is distorted as the distance from the median plane, this fact should be taken into account when designing new piezoresonance devices.*

*The results of the numerical analysis of the proposed mathematical model for the case of AT-cut of quartz are presented: the dependences of the relative change in the frequency of oscillations on the relative mass load for different modes of oscillations are constructed, the dependences of the mechanical shift on the two spatial coordinates  $X_2, X_3$ , at some fixed values of the relative mass load are constructed. It is shown that the presence of the relative mass load leads to a reduction in the resonance frequency  $f$ , it is found that the relative mass load has less influence on the resonance frequency at the higher harmonics. It is established the fact of dependence of mechanical displacement on the spatial coordinate, it is shown that the wave shape is distorted with the distance from the median plane  $X_3 = 0$ , that is, in contrast to the common one-dimensional models, the proposed model indicates that the wave shape becomes different from sinusoidal due to the boundary effect.*

*The proposed mathematical model of piezoelectric plate oscillations can be used in the design of new resonators, filters, sensors in communication control devices, instrumentation and other piezoresonance vibrating systems.*

**Key words:** quartz resonator; thickness-shear oscillations piezoelement, Y and AT-cut quartz, matrix-operator method.